MPSI 2024/2025 | Correction DM n°4 | À rendre le lundi 02/12

I - Détermination d'un dipôle inconnu

1) Pour un signal sinusoïdal, on rappelle que la forme générale est :

$$s(t) = S_0 + S_m \cos(\omega t + \phi)$$

Pour la résistance, voit graphiquement qu'il s'agit un cosinus non déphasé avec :

$$\boxed{U_0 = 0} \qquad \boxed{U_m = 5,0\,\text{V}} \qquad \boxed{\phi_R = 0} \qquad T = 6,0\,\text{ms} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 1,0 \cdot 10^3\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

Pour le dipôle D, voit graphiquement qu'il s'agit un cosinus de même pulsation mais décalé temporellement de $\tau = 0,5$ ms. Ainsi,

$$\boxed{V_0 = 0} \qquad \boxed{V_m = 2,0\,\text{V}} \qquad \boxed{\omega = 1,0 \cdot 10^3\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}} \qquad \boxed{\phi_D = \frac{2\pi\tau}{T} = \frac{\pi}{6}\,\text{rad}}$$

2) En régime sinusoïdal forcé, on a :

$$\underline{u}(t) = R\,\underline{i}(t) \quad \text{et} \quad \underline{v}(t) = \underline{Z}\,\underline{i}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\underline{v}(t)}{\underline{u}(t)} = \frac{X + jY}{R}$$

On en déduit le rapport des amplitudes et le déphasage :

$$\left|\frac{\underline{v}(t)}{\underline{u}(t)}\right| = \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{R} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{\underline{v}(t)}{\underline{u}(t)}\right) = \frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$$

Du déphasage, il vient :

$$\frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{Y}{X} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Que l'on injecte dans le gain :

$$\frac{2}{5} = \frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{R} = \frac{\sqrt{3Y^2+Y^2}}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y = \frac{R}{5} = 20\,\Omega}$$

On ne conserve que la racine positive car $X > 0$ et $\arctan\left(\frac{Y}{X}\right) > 0$ donc $Y > 0$. On en déduit finalement :

$$\boxed{X = Y\sqrt{3} = 35\,\Omega}$$

Le dipôle D est donc l'association en série d'une résistance $\boxed{r = X = 35\,\Omega}$ et d'une inductance $\boxed{L = \frac{Y}{\omega} = 20\,\text{mH}}$.

---------------------------------- Fin de la partie I ----------------------------------

II - Étude d'un circuit à retard

3) Signaux réels :

$$e(t) = E_m \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad s(t) = e(t-\tau) = E_m \cos(\omega t - \omega\tau)$$

On en déduit les signaux complexes :

$$\boxed{\underline{e}(t) = E_m\, e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{s}(t) = E_m\, e^{j\omega t - j\omega\tau}}$$

On en déduit la fonction de transfert :

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = e^{-j\omega\tau}}$$

4) On a, pour $\omega \to 0$:

$$\boxed{\underline{H_r} \simeq 1 - j\omega\tau \quad \text{et} \quad \underline{H_1} = 1 - j\omega RC}$$

On réalise bien un filtre à retard, avec $\boxed{\tau = RC}$.

5) On a, pour $\omega \to 0$:

$$\underline{H_r} \simeq 1 - j\omega\tau + \frac{(-j\omega\tau)^2}{2} = \boxed{1 - j\omega\tau - \frac{\omega^2\tau^2}{2}}$$

et

$$\underline{H_2} \simeq 1 - \left(j\omega RC - LC\omega^2\right) + \left(j\omega RC - LC\omega^2\right)^2$$

On ne garde que les termes d'ordre inférieur à 2. Ainsi,

$$\underline{H_2} \simeq 1 - \left(j\omega RC - LC\omega^2\right) + (j\omega RC)^2 = \boxed{1 - j\omega RC + \omega^2\left(LC - R^2C^2\right)}$$

On réalise bien un filtre à retard à condition que :

$$\boxed{\tau = RC} \quad \text{et} \quad -\frac{\tau^2}{2} = LC - R^2C^2 \quad \Rightarrow \quad LC = \frac{R^2C^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

\- Fin de la partie II -